线性代数期中复习

邱嘉诚

武汉大学数学与统计学院

2023 年 4 月 15 日

1 行列式

2 矩阵

3 线性方程组

行列式的定义回顾

我们习惯用 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 来表示行列式，其中 A 指的是一个矩阵。行列式被定义为：$|A| = \Sigma_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}$，其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$. 之后我们可以由行列式的性质得到不同的展开方式。

行列式的性质

行列式有一些简单的性质如下：

- 上（下）三角行列式的值等于对角元的乘积
- 某一行（列）全为 0 的行列式值为 0
- 用某个常数 c 乘行列式某行（列）所得的行列式的值为原先的 c 倍
- 两行（列）对换，行列式值改变符号（即乘上一个 -1）
- 若某两行（列）成比例，行列式值为 0
- 拆分性质：某行（列）的 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，可以拆成两个行列式相加
- 将行列式某行（列）乘常数 c 再加到另一行（列）不改变行列式的值
- 行列式转置值不变

行列式的性质

此外还有一些需要了解的内容

Cramer 法则

$$x_i = \frac{1}{|A|} \cdot [\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_{i-1}}, \vec{b}, \vec{a_{i+1}}, \cdots, \vec{a_n}]$$

Vander Monde 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n}^{n} (x_j - x_i)$$

行列式的性质

分块上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} A & M \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|, \begin{vmatrix} A & O \\ N & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

行列式计算或证明的方法

- 用性质化为三角行列式或者降阶
- (用定义）按某一行（列）展开
- 提取因子 *
- 各行（列）元素和相等的行列式
- 递推法与数学归纳法
- Vander Monde 行列式与升阶/加边法
- 拆分法 *

矩阵的基本概念和性质

矩阵的基本概念和性质有很多，比较重要的主要是逆矩阵、初等变换和分块矩阵。

逆矩阵

设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B 使 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆矩阵，B 为 A 的逆矩阵，记 $B = A^{-1}$.

- 逆矩阵的积仍然可逆，若乘上一个不可逆矩阵则不可逆
- A 的伴随矩阵 A^*，它是 A 的各元素代数余子式构成的矩阵的转置
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

矩阵的基本概念和性质

初等变换与初等矩阵

下列三种矩阵变换分别称为矩阵的第一、第二、第三类初等行变换，对列也是一样的（对分块矩阵也是一样的）：（1）对调矩阵中某两行的位置；（2）用一非零常数乘以某一行；（3）将矩阵的某一行乘以常数 k 后加到另一行上去。

- 对应的初等矩阵是 P_{ij}、$P_i(k)$ 和 $T_{ij}(k)$
- $|P_{ij}| = 1$、$|P_i(k)| = k$ 和 $|T_{ij}(k)| = 1$

可逆矩阵的计算

伴随矩阵的性质

n 阶矩阵 A 及其伴随矩阵 A^* 最重要的关系是 $AA^* = A^*A = |A|\, I_n$，伴随矩阵的很多性质原则上都能据此推导出来。

- $(A')^* = (A*)'$
- $(cA)^* = c^{n-1}A^*$
- A 可逆时，A^* 也可逆，$(A^*)^{-1} = (A^{-1*})$
- ……

可逆矩阵的计算

可逆矩阵的计算

可以通过初等行变换将 $[A|I_n]$ 变为 $[I_n|A^{-1}]$，或者也可以通过一些矩阵计算得到逆矩阵。

迹的运用

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$，其具有简单的四条性质：

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(kA) = k \cdot tr(A)$
- $tr(A') = tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

分块初等变换以及摄动法

分块初等变换

一般的矩阵的初等行列变换可以视为时一阶分块矩阵的初等变换，因此矩阵的分块初等变换也有类似的性质，其多用于证明一些行列式等式以及秩不等式。

摄动法

当 A 是一个奇异阵时，$|A| = 0$，那么 $|A + t \cdot I_n|$ 作为一个 t 的不含常数项的多项式，$t = 0$ 时值为 0，那么我们可以知道存在非常小的 t 使得 $A + t \cdot I_n$ 可逆。这就是摄动法的关键之处。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 线性方程组

矩阵的秩

矩阵秩的基本公式

- 若 $k \neq 0, r(kA) = r(A)$
- $r(AB) \leq \min r(A), r(B)$
- $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$
- ……

线性方程组的解

齐次线性方程组的解

$A\vec{x}=\vec{0}$ 称为齐次线性方程组，$A\vec{x}$ 可以看作是 A 的列向量的线性组合，那么它的解的存在性和结构就比较容易看出：

- 如果 $rank(A)=n$，那么其列向量就是一组线性无关的向量，那么只有零解（一个解）
- 如果 $rank(A)<n$，那么其列向量中至少有一个可以被其他向量线性表出，那么有非零解（无穷个）

这样我们也很容易想到非齐次线性方程组组有解的条件：$rank(A)=rank(\tilde{A})$，加入一个零向量不改变增广矩阵的秩因此这个等式对于齐次线性方程组而言是恒成立的。

线性方程组的解

非齐次线性方程组的解

在计算出 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解后得到基础解系，再计算出一个 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的特解，这个特解加上基础解系就是非齐次线性方程组的通解，当然它的解的存在性比较容易看出是 $rank(A) = rank(\tilde{A})$，此等式不成立时无解。

- 如果 $rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$，那么有且仅有一个解
- 如果 $rank(A) = rank(\tilde{A}) < n$，那么有无穷个解